Dr. P. Wolf

Mathematik Selbsttest

"Lohnt sich für mich der Mathe-Vorkurs?"

Sind Sie sich nicht sicher, ob es sich für Sie lohnt den Vorkurs zu besuchen? Testen Sie sich mit den folgenden Aufgaben selbst! Die Aufgaben sind nach den Thementagen des Vorkurses sortiert (Abweichungen im Vorkurs sind möglich). Sollten Sie Schwierigkeiten mit den Aufgaben haben, so empfehlen wir dringend den Besuch des Vorkurses! Wir wollen darauf hinweisen, dass der Vorkurs auch Themen behandelt, die nicht mehr an allen Schulen (auch nicht im Mathe-LK) besprochen werden. Nutzen Sie daher den Vorteil, den der Besuch des Vorkurses liefern kann und nehmen Sie aktiv teil!

Infos und Anmeldung zum Mathe-Vorkurs:

`mathevorkurs.hochschule-stralsund.de`

Aufgabe 1 (Tag 1)

Lösen Sie die Klammern folgender reellwertiger Ausdrücke auf (Termumformung)!

a) $-3(x-2)-x(-1-x)+(y-z)$

b) $(-2x+6y)(x-y)+2(3y-x)(y-x)$

c) $-(x-2y)(x+2y)(4y^2-x^2)$

Aufgabe 2 (Tag 1)

Es sei $x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 0$.

a) Klammern Sie den Ausdruck $-3x$ aus dem Polynom $-3x^3+6x^2-9x$ aus!

b) Zu welchem Ausdruck können Sie also den Bruch $\dfrac{-3x^3+6x^2-9x}{-3x}$ vereinfachen?

Aufgabe 3 (Tag 1)

a) Geben Sie ein Beispiel für eine negative reelle Zahl, die nicht rational ist! Sie suchen also ein $x \in]-\infty, 0[\cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$!

b) Aus welchen reellen Zahlen besteht die folgende Menge? $M = \{x \leq 20 \,|\, \exists n \in \mathbb{N} : \; n^2 = x\}$

c) Berechnen Sie! $\displaystyle\sum_{i=2}^{5} \left(i^2 - 2i\right)$

Aufgabe 4 (Tag 1+2)

Kürzen Sie mittels der binomischen Formeln die folgenden reellen Brüche soweit wie möglich!

a) $\dfrac{3\,(x-4)^2}{x^2+16-8x}$

b) $\dfrac{x^2-4x+4}{2x-4}$

c) $\dfrac{x^2+6x+9}{x^2-9}$

Aufgabe 5 (Tag 1+2)

Fassen Sie die Ausdrücke zu einem Bruch zusammen und vereinfachen Sie diesen soweit wie möglich!

a) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{3} - \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{12}$

b) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{x-y}{xy} - \dfrac{1}{y}$

Aufgabe 6 (Tag 3)

Lösen Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme.

a)

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x - 2y + 5z & = & 8 \\ x + y + 3z & = & 1 \\ 3x + 3y - z & = & 2 \end{array} \right.$$

b)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 5 & 8 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

Aufgabe 7 (Tag 4)

a) Berechnen Sie eine Gerade der Form $g(x) = ax + b$, welche durch die Punkte $(1\,|\,3)$ und $(3\,|\,-3)$ läuft!

b) Bestimmen Sie die Steigung, sowie den y-Achsenabschnitt und die Nullstellen der Gerade!

Aufgabe 8 (Tag 4)

Gegeben sei die quadratische reelle Funktion $f(x) = x^2 - 2x + 3$.

a) Bestimmen Sie Definitions- und Wertebereich, sowie die Nullstellen der Funktion!

b) Beschreiben Sie, welche Verschiebung des Graphen von $g(x) = x^2$ zum Graphen von f führen! Tipp: Scheitelpunktform.

Aufgabe 9 (Tag 4)

Bestimmen Sie den Definitionsbereich der folgenden reellwertigen Funktionen und geben Sie ihn jeweils als Intervall an!

a) $f(x) = \sqrt{x-1}$

b) $g(x) = \sqrt{\dfrac{1}{2x+1}}$

Aufgabe 10 (Tag 4+5)

Bestimmen Sie die reellen Lösungsmenge folgender (Un-)Gleichungen!

a) $2x + 3 = x^2$

b) $5e^{3x} = 10$

c) $e^{\sqrt{x}-1} = -\sqrt[3]{2}$

d) $|x-2| = 4$

e) $|2x+4| \leq 6$

Aufgabe 11 (Tag 5)

Es sei $x > 0$. Schreiben Sie folgende Ausdrücke als *eine* Wurzel! Beispiel: $x^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{x^3}$.

a) $\dfrac{x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{3}{4}}} \cdot x^{\frac{1}{12}}$

b) $\dfrac{x^2}{\sqrt{x}}$

c) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt[5]{x}}} \cdot \sqrt[4]{x^{\frac{3}{5}}}$

Aufgabe 12 (Tag 6)

Ein Kapital $K_0 = 8400$ € wird mit festem Zinssatz $p = 3.5\%$, mit Zinseszins, bei einer Bank angelegt. Am Ende beträgt das Kapital $K_n = 10687.15$ €.

a) Wie viele Jahre war das Kapital angelegt?

b) Wenn man dasselbe Endkapital schon nach 5 Jahren erzielen will, wie hoch müsste der Zinssatz sein?

Aufgabe 13 (Tag 6)

Bestimmen Sie die fehlenden Werte zu den Seitenlängen und Winkelgrößen (Gradmaß)! Beachten Sie, dass die Dreiecke nicht unbedingt rechtwinklig sind! Runden Sie auf die zweite Nachkommastelle.

a) $\alpha = 11°$, $\beta = 22°$, $c = 4\,\text{cm}$

b) $\alpha = \gamma = 44°$, $b = 2\,\text{cm}$

Aufgabe 14 (Tag 7)

Berechnen Sie die erste Ableitung folgender reeller Funktionen!

a) $f(x) = -2x^5 + 3x^7 - x + \frac{5}{13}$

b) $f(x) = \sqrt{x}$

c) $f(x) = xe^x$

d) $f(x) = e^{2x^3}$

Aufgabe 15 (Tag 8)

Berechnen Sie die folgenden Integrale bzw. Stammfunktionen!

a) $\int\limits_0^1 2x - 3 \text{ dx}$

b) $\int xe^x \text{ dx}$

c) $\int 6xe^{x^2} \text{ dx}$

Dr. P. Wolf

Lösungen zum Mathematik Selbsttest

Aufgabe 1

a) $x^2 - 2x + y - z + 6$

b) 0

c) $16y^4 - 8x^2y^2 + x^4$

Aufgabe 2

a) $-3x\left(x^2 - 2x + 3\right)$

b) $\dfrac{-3x^3 + 6x^2 - 9x}{-3x} = x^2 - 2x + 3$

Aufgabe 3

a) Zum Beispiel $-\sqrt{2}$ oder $-\pi$.

b) $M = \{1, 4, 9, 16\}$

c) $\sum\limits_{i=2}^{5}\left(i^2 - 2i\right) = 0 + 3 + 8 + 15 = 26$

Aufgabe 4

a) $\dfrac{3\,(x-4)^2}{x^2 + 16 - 8x} = 3$

b) $\dfrac{x^2 - 4x + 4}{2x - 4} = \dfrac{1}{2}\,(x-2)$

c) $\frac{x^2+6x+9}{x^2-9} = \frac{x+3}{x-3}$

Aufgabe 5

a) $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{3}{4} + \frac{1}{12} = \frac{1}{2}$

b) $\frac{1}{x} + \frac{x-y}{xy} - \frac{1}{y} = 0$

Aufgabe 6

a) Per Gauß-Verfahren zeigt sich, dass das LGS die eindeutige Lösung $(x, y, z) = (2.97, -2.27, 0.1)$ hat.

b) Per Gauß-Verfahren erkennt man, dass das LGS unendlich-viele Lösungen hat. Der Lösungsraum ist eine Gerade im dreidimensionalen Raum:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{10}{3} \\ -\frac{7}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -\frac{11}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7

a) $g(x) = -3x + 6$

b) Steigung ist -3. Schnittpunkt mit y-Achse bei $(0\,|\,6)$. Nullstelle bei $x = 2$.

Aufgabe 8

a) $D_f = \mathbb{R}$, $W_f = [2\,, \infty[$. Nullstellen gibt es nicht, da der Graph oberhalb der x-Achse liegt.

b) Aus der Scheitelpunktform $(x-1)+2$ lässt sich ablesen, dass eine Verschiebung um 2 nach oben und um 1 nach rechts durchgeführt wurde.

Aufgabe 9

a) $D_f = [1\,,\,\infty[$

b) $D_g = \left]-\frac{1}{2}\,,\,\infty\right[$

Aufgabe 10

a) $x = 3$ oder $x = -1$

b) $x = \frac{1}{3}\ln(2)$

c) Da $e^x > 0$ für alle reellen x, ist die Lösungsmenge leer.

d) $x = 6$ oder $x = -2$

e) $x \in [-5\,,\,1]$

Aufgabe 11

a) $\dfrac{x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{3}{4}}} \cdot x^{\frac{1}{12}} = \sqrt{x}$

b) $\dfrac{x^2}{\sqrt{x}} = \sqrt{x^3}$

c) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt[5]{x}}} \cdot \sqrt[4]{x^{\frac{3}{5}}} = \sqrt[6]{x}$

Aufgabe 12

a) Wir wissen: $8400 \cdot \left(1 + \frac{3.5}{100}\right)^n = 10687.15$. Daraus folgt $1.035^n = \frac{10687.15}{8400} \approx 1.2723$. Mit dem Logarithmus (+ Basiswechsel zum ln) erhalten wir $n = \frac{\ln(1.2733)}{\ln(1.035)} \approx 7$. Also hat man es 7 Jahre angelegt.

b) Wir wissen: $8400 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^5 = 10687.15$. Dies wollen wir nach p umstellen, also sehen wir zunächst, dass $1 + \frac{p}{100} = \sqrt[5]{\frac{10687.15}{8400}} \approx 1.04934$. Das können wir nun leicht umstellen und erhalten $p = 100 \cdot (1.04934 - 1) \approx 4.93\%$. Also müssten wir das Kapital zu 4.93% anlegen, um schon nach 5 Jahren das gleiche Endkapital zu erhalten.

Aufgabe 13

Über den Sinussatz und die Innenwinkelsumme lassen sich die fehlenden Werte schnell bestimmen:

a) $\gamma = 147°$, $a = 1.4\,\text{cm}$, $b = 2.75\,\text{cm}$.
Erst Innenwinkelsumme, dann $\frac{a}{\sin(11°)} = \frac{4}{\sin(147°)}$ nach a umstellen und analog b berechnen.

b) $\beta = 92°$, $a = c = 1.39\,\text{cm}$. Vorgehen wie zuvor.

Aufgabe 14

a) $f'(x) = -10x^4 + 21x^6 - 1$

b) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

c) $f'(x) = e^x + xe^x = (1+x)e^x$

d) $f'(x) = 6x^2e^{2x^3}$

Aufgabe 15

a) $\displaystyle\int_0^1 2x - 3\,\mathrm{dx} = \left[x^2 - 3x\right]_0^1 = 1 - 3 - 0 = -2$

b) $\displaystyle\int xe^x\,\mathrm{dx} = xe^x - \int e^x\,\mathrm{dx} = xe^x - e^x + c$ mit $c \in \mathbb{R}$ (partielle Integration)

c) $\displaystyle\int 6xe^{x^2}\,\mathrm{dx} \overset{t:=x^2}{=} \int 3e^t\,\mathrm{dt} = 3e^t = 3e^{x^2} + c$ mit $c \in \mathbb{R}$ (Substitution)